ПРОСТРАНСТВА ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ РЕГУЛЯРНОГО КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Кужель А.В., доктор физико-математических наук, профессор

1. Квазипроизводные

Напомним необходимые для дальнейшего основные понятия и обозначения (см., например, [1, 2]).

В гильбертовом пространстве $L_2(a,b)$, где (a,b) – конечный интервал, рассмотрим вещественные функции p_k $(k=\overline{0,n})$, удовлетворяющие условиям :

$$1)\ \int_a^b \frac{dx}{|P_0(x)|}<\infty, \qquad 2)\ \int_a^b |P_k(x)|\,dx<\infty \quad (k=\overline{1,n}). \tag{1}$$

Для некоторых функций f из $L_2(a,b)$ имеют смысл выражения $f^{[k]}$ (квазипроизводные выражения, или: квазипроизводные функции), которые определяются следующим образом:

$$\begin{cases} f^{[0]}=f, \quad f^{[k]}=Df^{[k-1]} \quad \left(k=\overline{1,n-1}\right) \\ f^{[n]}=p_0\cdot Df^{[n-1]}, \\ f^{[n+k]}=p_k\cdot f^{[n-k]}-Df^{[n+k-1]} \quad (k=\overline{1,n}). \end{cases} \tag{2}$$

где $(Df)(x)=\dfrac{df(x)}{dx}$.

Таким образом, на основании (2),

$$f^{[k]}=f^{(k)} \quad (k=\overline{0,n-1}),$$

$$f^{[n]}=p_0f^{(n)},$$

$$f^{[n+1]}=p_1f^{(n-1)}-D[p_0f^{(n)}],$$

$$f^{[n+2]}=p_2f^{(n-2)}-D\Big[p_1f^{(n-1)}-D[p_0f^{(n)}]\Big]$$

....

В частности,

$$f^{[2n]}=p_nf-D[p_{n-1}f^{(1)}-D[p_{n-2}f^{(2)}-\mathrm{K}-D[p_1f^{(n-1)}-D[p_0f^{(n)}]\mathrm{K}\ ].$$

Если при этом функция p_k $(k=\overline{0,n})$ дифференцируема $n-k$ раз, то для $2n$ раз дифференцируемой функции f квазипроизводная $f^{[2n]}$ может быть записана в форме Якоби – Бертрана:

$$f^{[2n]}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(p_{n-k}f^{(k)})^{(k)}. \tag{3}$$

Рассмотрим линеал D_* функций из $L_2(a,b)$, для которых квазипроизводные $f^{[k]}$ ($k=\overline{0,2n-1}$) существуют и абсолютно непрерывны, а $f^{[2n]}\in L_2(a,b)$.

После соответствующих преобразований убеждаемся, что для любых функций f и g из D_* имеет место равенство

$$f^{[2n]}g-\frac{1}{p_0}f^{[n]}g^{[n]}=\sum_{k=0}^{n-1}p_{n-k}f^{[k]}g^{[k]}-D\sum_{k=1}^{n}f^{[2n-k]}g^{[k-1]} \tag{4}$$

При обосновании этого равенства удобно воспользоваться соотношением

$$Df^{[2n-k]}=p_{n-k+1}f^{[k-1]}-f^{[2n+1-k]},$$

которое следует непосредственно из последнего равенства в (2) после замены k на $n-k+1$.

С помощью (4) получаем известное тождество Лагранжа:

$$f^{[2n]}\bar g-f\bar g^{[2n]}=\frac{d}{dx}[f,g]_x, \tag{5}$$

где

$$[f,g]_x=\sum_{k=1}^{n}\left(f^{[k-1]}(x)\bar g^{[2n-k]}(x)-f^{[2n-k]}(x)\bar g^{[k-1]}(x)\right). \tag{6}$$

Интегрируя почленно (6) в пределах от a до x $(a<x<b)$, устанавливаем важное тождество Лагранжа в интегральной форме:

$$\int_a^x(f^{[2n]}\bar g-f\bar g^{[2n]})dx=[f,g]_x-[f,g]_a. \tag{7}$$

И, в частности, при $x=b$

$$(f^{[2n]},g)-(f,g^{[2n]})=[f,g]_b-[f,g]_a. \tag{8}$$

2. Квазидифференциальные системы

Пусть c_k ($k=\overline{0,2n-1}$) – некоторые комплексные числа, а x_0 – фиксированная точка из $[a,b]$. Тогда, как известно (см., например, [1]), справедлива следующая

Теорема 1. Для произвольной функции h из $L_2(a,b)$ квазидифференциальная система

$$\begin{cases} f^{[2n]}=h, \\ f^{[k]}(x_0)=c_k \qquad (k=\overline{0,2n-1}) \end{cases}$$

имеет одно и только одно решение $f \in D_*$.

Рассмотрим линеал

$$N_0 = \{g \in D_* | g^{[2n]} = 0\}. \tag{9}$$

С учетом теоремы 1 нетрудно убедиться, что $\dim N_0 = 2n$. Базисом линеала N_0 являются, в частности, вещественные решения g_m $(m = \overline{1,2n})$ уравнения $g^{[2n]} = 0$, удовлетворяющие начальным условиям

$$g^{[k-1]}(a) = \delta_{mk} \qquad (k = \overline{1,2n}), \tag{10}$$

где δ_{mk} – символ Кронекера.

3. Квазидифференциальный оператор T

Рассмотрим оператор T, определяемый на линеале

$$D(T) = \{f \in D_* | f^{[k]}(a) = f^{[k]}(b) = 0 \quad (k = \overline{0,2n-1})\} \tag{11}$$

равенством

$$Tf = f^{[2n]} \qquad (f \in D(T)). \tag{12}$$

На основании (6) и (11)

$$[f,g]_a = [f,g]_b = 0$$

и, следовательно, с учетом равенств (8) и (12),

$$(Tf,g) = (f,g^{[2n]}) \qquad (f \in D(T), \quad g \in D_*). \tag{13}$$

В частности, если $g \in D(T)$, то из равенств (12) и (13) следует, что оператор T эрмитов. Более того, как известно, оператор T плотно определен и, следовательно, является симметрическим. При этом оператор T^* определяется равенством

$$T^* f = f^{[2n]} \qquad (D(T^*) = D_*). \tag{14}$$

4. Регулярные расширения оператора T

Введем обозначение:

$$f[x] = \left(f^{[0]}(x), f^{[1]}(x), f^{[2]}(x), \ldots, f^{[2n-1]}(x)\right). \tag{15}$$

Тогда выражение $[f,g]_x$, определяемое равенством (6), можно переписать в виде

$$[f,g]_x = f[x]Ug^*[x], \tag{16}$$

где

$$U=\begin{pmatrix}0 & U_1\\ U_1 & 0\end{pmatrix},\qquad U_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & K & 0 & 1\\ 0 & 0 & K & 1 & 0\\ K & K & K & K & K\\ 0 & 1 & K & 0 & 0\\ 1 & 0 & K & 0 & 0\end{pmatrix},\tag{17}$$

причем U_1 – унитарная матрица порядка n.

Рассмотрим $4n$-мерное пространство $\mathbf{C}^{4n}$ и отображение W:

$$W: D_* \to \mathbf{C}^{4n},\qquad W(f)=x,\tag{18}$$

где $f\in D_*$, а компоненты вектора

$$x=(x_1, x_2, K, x_{2n}, x_{2n+1}, K, x_{4n})\tag{19}$$

определяются равенствами

$$x_k = f^{[k-1]}(a),\qquad x_{2n-k}=f^{[k-1]}(b),\qquad (k=\overline{1,2n}).$$

Если при этом

$$\hat{X}=\{W(f)\,|\,f\in X,\ X\subset D_*\},\tag{20}$$

то $$\hat{D}(T)=\{0\},\qquad \hat{D}(T^*)=\mathbf{C}^{4n}.$$

Пусть B – регулярное расширение [3] оператора T, то есть $T\subset B$ и

$$(Tf, g)=(f, Bg)\qquad (f\in D(T),\ g\in D(B)).$$

Так как оператор T симметрический, то $B\subset T^*$ и, таким образом,

$$Bg=g^{[2n]}\qquad (g\in D(B)).$$

При этом, с учетом равенств (8) и (13),

$$[f, g]_b-[f, g]_a=0.$$

Последнее равенство, на основании соотношений (15), (16) и (19) можно переписать в виде

$$0=[f,g]_a-[f,g]_b=x\tilde{J}y^*=(x\tilde{J}, y)_0,\tag{21}$$

где $(\cdot,\cdot)_0$ – скалярное произведение в $\mathbf{C}^{4n}$,

$$y=\left(g^{[0]}(a), g^{[1]}(a), K, g^{[2n-1]}(a), g^{[0]}(b), g^{[1]}(b), K, g^{[2n-1]}(b)\right),$$

а $4n$-матрица

$$\tilde{J}=\begin{pmatrix}0 & U\\ -U & 0\end{pmatrix},$$

где матрица U определяется равенствами (17), удовлетворяет условиям где матрица U определяется равенствами (17), удовлетворяет условиям

$$\widetilde{J}^* = -\widetilde{J}, \qquad \widetilde{J}^2 = -E,$$

где E – единичная матрица порядка $4n$.

Рассматривая в $\mathbf{C}^{4n}$ оператор J, определяемый равенством

$$Jx = x \cdot \widetilde{J} \qquad (x \in \mathbf{C}^{4n}),$$

можем переписать (21) в виде

$$[f, g]_a - [f, g]_b = (Jx, y)_0. \tag{22}$$

Если $B \in P(T)$, то, используя соотношения (8)) и (22), получим:

$$0 = (Bf, g) - (f, B^* g) = (Jx, y)_0. \tag{23}$$

А так как $x \in \hat{D}(B)$, $y \in \hat{D}(B^*)$, то приходим к заключению, что линеалы $J\hat{D}(B)$ и $\hat{D}(B^*)$ ортогональны, причем

$$J\hat{D}(B) \oplus \hat{D}(B^*) = \mathrm{C}^{4n}. \tag{24}$$

В частности, если B – самосопряженное расширение оператора T, то

$$J\hat{D}(B) \perp \hat{D}(B), \qquad J\hat{D}(B) \oplus \hat{D}(B) = \mathrm{C}^{4n}. \tag{25}$$

Имеет место, как легко видеть, и обратное утверждение: если выполняются соотношения (25), то B – самосопряженный оператор.

Простейшим (и важным во многих вопросах) примером самосопряженного расширения оператора T есть оператор $\widetilde{T}$, который определяется граничными условиями

$$f^{[k]}(a) = f^{[k]}(b) = 0 \qquad (k = \overline{0, n-1}). \tag{26}$$

Тот факт, что оператор $\widetilde{T}$ является самосопряженным, легко проверяется. Действительно, при условии (26) линеал $\hat{D}(\widetilde{T})$ состоит из векторов x вида

$$x = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, x_{3n+1}, \ldots, x_{4n})$$

и, следовательно, $\dim \hat{D}(\widetilde{T}) = 2n$. Кроме того, для любых x и y из $\hat{D}(\widetilde{T})$ $Jx \perp y$, где, как и прежде, оператор J определяется равенством $Jx = x \cdot \widetilde{J}$. А это означает, что имеют место соотношения (25) и, таким образом, $\widetilde{T}$ – самосопряженный оператор.

Важность оператора $\widetilde{T}$ состоит, в частности, в том, что, как показано в работе М.Г.Крейна [2], в случае полуограниченности оператора T, оператор $\widetilde{T}$ является фридрихсовым расширением оператора T.

5. Пространства граничных значений оператора T

На основании равенств (14) и (8), при любых f и g из линеала $D(T^*)$

$$(T^*f,g)-(f,T^*g)=[f,g]_b-[f,g]_a. \tag{27}$$

Или, с учетом равенства (16),

$$(T^*f,g)-(f,T^*g)=f[b]Ug^*[b]-f[a]Ug^*[a], \tag{28}$$

где вектор $f[x]$ определяется равенством (15), вектор $g[x]$ – аналогичным равенством, а матрица U – равенством (17).

Таким образом, с учетом выражения для матрицы U,

$$U^2=-E, \qquad U^*=-U. \tag{29}$$

Пусть (X,Γ_1,Γ_2) – пространство граничных значений (ПГЗ) оператора T, который определяется условиями (11) и (12). Тогда, в соответствии с определением ПГЗ,

$$(T^*f,g)-(f,T^*g)=(\Gamma_1 f,\Gamma_2 g)_X-(\Gamma_2 f,\Gamma_1 g)_X. \tag{30}$$

В качестве X выберем $2n$-мерное пространство $X=\mathbf{C}^{2n}$, а операторы Γ_1 и Γ_2 будем искать в виде

$$\Gamma_1 f=f[b]P+f[a]Q, \qquad \Gamma_2 f=f[b]R+f[a]S, \tag{31}$$

где P, Q, R, S – некоторые фиксированные матрицы порядка $2n$.

С учетом (30) и (31) находим, что

$$\begin{aligned}(\Gamma_1 f,\Gamma_2 g)_X-(\Gamma_2 f,\Gamma_1 g)_X &=(\Gamma_1 f)(\Gamma_2 g)^*-(\Gamma_2 f)(\Gamma_1 g)^*=\\ &=f[b](PR^*-RP^*)g^*[b]+f[b](PS^*-RQ^*)g^*[a]+\\ &+f[a](QR^*-SP^*)g^*[b]+f[a](QS^*-SQ^*)g^*[a]\end{aligned}$$

и, таким образом, равенство (28) будет иметь место при условии, что

$$\begin{cases}PR^*-RP^*=U,\\ PS^*-RQ^*=0,\\ QS^*-SQ^*=-U.\end{cases} \tag{32}$$

Система (32) может быть записана в матричном виде

$$\begin{pmatrix}P & R\\ Q & S\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & E\\ -E & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P^* & Q^*\\ R^* & S^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U & 0\\ 0 & -U\end{pmatrix}, \tag{33}$$

где E – единичная $2n$-матрица.

Отметим, что решения системы (32) существуют. Например, одним из ее решений является следующее:

$$P=\frac{1}{2}UR^{-*}, \qquad Q=-P, \qquad S=R,$$

где R – приоизвольная обратимая $2n$-матрица. При таком условии равенства (31) перепишутся в виде:

$$\Gamma_1 f=(f[b]-f[a])P, \qquad \Gamma_2 f=(f[b]+f[a])R.$$

Таким образом, если операторы Γ_1 и Γ_2, отображающие $D(T^*)$ в X, определяются равенствами (31), где матрицы P, Q, R и S связаны соотношениями (32), то имеет место равенство (30).

Чтобы убедиться в том, тройка (X,Γ_1,Γ_2) является пространством граничных значений оператора T, остается показать, что для произвольных векторов x и y из X в $D(T^*)$ найдется такой вектор f, что $\Gamma_1 f=x$, $\Gamma_2 f=y$. С этой целью вначале предположим, что система

$$\begin{cases} f[a]Q+f[b]P=x, \\ f[a]S+f[b]R=y, \end{cases} \tag{34}$$

разрешима относительно $f[a]$ и $f[b]$. Тогда, используя равенство (32), получим:

$$xS^*=f[a]QS^*+f[b]PS^*=f[a](SQ^*-U)+f[b]RQ^*=$$
$$=(f[a]S+f[b]R)Q^*-f[a]]U=yQ^*-f[a]U.$$

откуда следует (с учетом равенства $U^2=-E$), что

$$f[a]=(xS^*-yQ^*)U. \tag{35}$$

Аналогично, рассматривая вектор yP^*, после соответствующих преобразований убеждаемся, что

$$f[b]=(yP^*-xR^*)U. \tag{36}$$

Покажем теперь, что и наоборот – если x и y - произвольные векторы из X, то векторы $f[a]$ и $f[b]$, определяемые равенствами (35) и (36), являются решенияеми системы (34).

Действительно, рассмотрим вектор $(f[b], f[a])$. В соответствии с (35) и (36),

$$(f[b],f[a])=(x,y)\begin{pmatrix} -R^*U & S^*U \\ P^*U & -Q^*U \end{pmatrix}. \tag{37}$$

С другой стороны, умножая равенство (33) справа на матрицу $\begin{pmatrix} -U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$, после соответствующих преобразований получим равенство

$$\begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -R^*U & S^*U \\ P^*U & -Q^*U \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Из равенств (38) следует, что матрицы в левой части этого равенства обратимы и, таким образом,

$$\begin{pmatrix} -R^*U & S^*U \\ P^*U & -Q^*U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}^{-1}.$$

Умножая это равенство слева на вектор (x,y) и учитывая равенство (37), получим следующее равенство:

$$(f[b],f[a]) = (x,y)\begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}^{-1},$$

откуда

$$(f[b],f[a])\begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix} = (x,y)$$

и, следовательно,

$$f[b]P + f[a]Q = x,$$

$$f[b]R + f[a]S = y,$$

то есть векторы $f[a]$ и $f[b]$, определяемые равенствами (35) и (36), являются решениями системы (34).

Таким образом, тройка (X,Γ_1,Γ_2), где $X = \mathbf{C}^{2n}$, а операторы Γ_1 и Γ_2 определяются равенствами (31), есть пространство граничных значений симметрического оператора T.

Это дает возможность при исследовании различных классов регулярных (в частности – самосопряженных) расширений оператора T пользоваться общей теорией пространств граничных значений эрмитовых операторов.

Литература.

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
2. Крейн М.Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. II. // Математич. сб-к. – Т. 21, вып. 3. – 1947. – С. 365 – 404.
3. Kuzhel A.V. Characteristic Function and Nonself-Adjoint Operator Models. – Kluwer Academic Publishers, 1996. – 273 p.
4. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально- операторных уравнений. - К.: Наукова думка, 1984. – 283 с.