О ТРЕХ ПРЯМЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЧЕТЫРЕХ ЛИНЕЙНЫХ ОБОЛОЧЕК ОРБИТ НАПРАВЛЕНИЙ СИММЕТРИИ ДИКИХ ГРУПП СИММЕТРИЙ

***Игнатенко В. Ф.**, доктор физико-математических наук, профессор,*
***Рудницкий О. И.**, кандидат физико-математических наук, доцент*
Плышевская С. П.

Рассмотрим в вещественном пространстве E^m бесконечную группу G косых симметрий, имеющую четыре $G(\vec{u})$-орбиты направлений симметрии $\vec{u}$. Взаимное расположение указанных орбит определяют γ_j-плоскости Π^{γ_j} ($j = \overline{0,3}$), причем размерность пересечения любых двух таких γ_j-плоскостей не превосходит единицы [1]. Пусть F_n – нецилиндрическая алгебраическая $(m-1)$-поверхность порядка $n>2$ с группой симметрий G. $\gamma_0=\lambda$, $\gamma_1=\mu$, $\gamma_2=\nu$, $\gamma_3=\sigma$ $(\lambda\ge\mu\ge\nu\ge\sigma)$, $\Pi^{\eta}=\Pi^{\lambda}+\Pi^{\mu}$, $\Pi^{r}=\Pi^{\eta}+\Pi^{\nu}$, $\Pi^{\kappa}=\Pi^{\nu}\cap\Pi^{\eta}$, $\Pi^{\upsilon}=\Pi^{\sigma}\cap\Pi^{r}$ $(\upsilon=\sigma)$, $\Pi^{\upsilon_\eta}=\Pi^{\sigma}\cap\Pi^{\eta}$; число $\varepsilon=\dim(\Pi^{\lambda}\cap\Pi^{\mu})=0$ или 1 [2]. Выделим из работы [2] следующий результат.

Теорема 1. Пусть γ_j-плоскости Π^{γ_j} ($j=\overline{0,3}$) пересекаются по двум различным прямым. Тогда при любом расположении Π^{γ} существует алгебраическая поверхность F_n с группой симметрий G, если $g+\upsilon\le\mu+2(1-\varepsilon)$.

В настоящей работе изучаются группы G со следующей конструкцией M γ_j-плоскостей Π^{γ}: произвольные три γ_{j_1}-плоскости $\Pi^{\gamma_{j_1}}$ ($j_1=\overline{1,3}$) из Π^{γ_j} пересекаются по трем различным прямым p_l ($l=\overline{1,3}$), образуя трехгранный угол с вершиной O, ребрами p_l и гранями $\Pi^{\gamma_{j_1}}$, а оставшаяся γ_j-плоскость Π^{γ_j}, имея нулевое пересечение с каждой из выбранных $\Pi^{\gamma_{j_1}}$, пересекается, в общем случае, с их суммой. Выделим два вида конструкции M: M_1, если $\Pi^{\nu}\cap\Pi^{\upsilon}=0$ или прямая их пересечения не принадлежит Π^{η}, и M_2, если плоскости Π^{ν} и Π^{υ} пересекаются по прямой, принадлежащей Π^{η}. Имеет место следуюшая

Теорема 2. Результаты теоремы 1 справедливы для конструкции M_1. Группа G, соответствующая конструкции M_2, в классе ФОТ не существует.

Доказательство. В декартовой системе координат $Oy_1\ldots y_4z_1\ldots z_rx_1\ldots x_t$ $(m=4+m+t)$ поверхность F_n зададим уравнением

$$R(y_1^2+\sum_{i=1}^{\lambda}\xi_i z_i)+S(y_2^2+\sum_{j=1}^{\mu-\varepsilon}\varsigma_j z_{\lambda+j})+T(y_3^2+\sum_{k=1}^{\rho}\chi_{r_1+k} z_{\lambda-k})+Py_4^2=c, \tag{1}$$

где многочлены R, S, T, P (не имеющие общего множителя) и линейные функции ξ, ζ_j, χ_{r_1+k} зависят только от x_ω $(\omega=\overline{1,t}\geq 2)$, $\rho=\nu-g$ [2]. Рассмотрим все возможные способы построения конструкции M.

1. Пусть $p_1=\Pi^\lambda\cap\Pi^\mu=Oz_\lambda$, $p_2=\Pi^\lambda\cap\Pi^g=Oz_{\lambda-1}$, $p_3=\Pi^\mu\cap\Pi^g=Oz_{\lambda+1}$ (конструкция вида M_1). Тогда $\dfrac{R_0}{T_0}=\dfrac{\chi_{\lambda-1}}{\zeta_\lambda}$, $\dfrac{S_0}{R_0}=\dfrac{\xi_\lambda}{\chi_{\lambda+1}}$, $\dfrac{T_0}{S_0}=\dfrac{\zeta_1}{\xi_{\lambda-1}}$ $(\zeta_\lambda\neq c\xi_\lambda,\xi_{\lambda-1}\neq c\chi_{\lambda-1},\zeta_\lambda\neq c\chi_{\lambda+1})$ [2].

Перемножив полученные соотношения, получим равенство $\chi_{\lambda-1}\xi_\lambda\zeta_1=\zeta_\lambda\chi_{\lambda+1}\xi_{\lambda-1}$. Оно возможно лишь в случае

$$\xi_\lambda=c_1\chi_{\lambda-1},\quad \zeta_1=c_2\xi_{\lambda-1},\quad \zeta_\lambda=c_1c_2\chi_{\lambda-1}, \tag{2}$$

где c_1, c_2 – вещественные числа.

При выполнении (2) многочлены R, S, T имеют вид

$$R=\zeta_\lambda,\quad S=\xi_\lambda,\quad T=c_1\zeta_1. \tag{3}$$

а многочлен P – произвольный

Пусть $\upsilon_1=0$, т. е. Π^υ образует прямую сумму с $\Pi^r=\Pi^\lambda$. Поскольку $g\geq 2$, многочлен

$$T=\lambda_0R+\lambda_1S. \tag{4}$$

при вещественных λ_0, λ_1. Тогда, учитывая (3),

$$\zeta_1=c_1^{-1}(\lambda_0\zeta_\lambda+\lambda_1\xi_\lambda). \tag{5}$$

Если $\upsilon\geq\upsilon_1\geq 1$, а $g+\upsilon\leq\mu$ (см. [2]), то

$$P=h_0R+h_1S\ , \tag{6}$$

h_0,h_1 – вещественные числа. С учетом (3),

$$P=h_0\zeta_\lambda+h_1\xi_\lambda. \tag{7}$$

Таким образом, если $g+\upsilon\leq\mu$, существует поверхность F_n с уравнением (1) и группой симметрий G. При этом многочлены R, S, T имеют вид (3) при выполнении соотношений (2) и (5), многочлен P – произвольный $(\upsilon_1=0)$ или имеет вид (7), если $\upsilon_1>1$.

2. Пусть $p_1=\Pi^\lambda\cap\Pi^\mu=Oz_\lambda$, $p_2=\Pi^\lambda\cap\Pi^\upsilon=Oz_{\lambda-1}$, $p_3=\Pi^\mu\cap\Pi^\upsilon=Oz_{\lambda+1}$ (конструкция вида M_1). Этот случай рассмотрен в [3] (см. также табл. 3, п. 1.2.5 работы [4]). Приведем основной результат.

Если $g+\upsilon \le \mu$, то в уравнении (1) поверхности F_n для групп симметрий G $R=\vartheta_{\lambda-1}$, $S=c_2\xi_\lambda$, $P=\xi_{\lambda-1}$ при выполнении соотношений $\xi_\lambda = c_1\vartheta_{\lambda+1}$, $\vartheta_{\lambda-1}=c_2\zeta_\lambda$, $\xi_{\lambda-1}=c_1c_2\zeta_1$ и $\xi_{\lambda-1}=h_0\vartheta_{\lambda-1}+c_2h_1\xi_\lambda$; многочлен T – произвольный ($g=0$) или $T=c_2(\lambda_0\zeta_\lambda+\lambda_1\xi_\lambda)$ при $g>1$.

3. Если $p_1=\Pi^\lambda\cap\Pi^\kappa=Oz_\lambda$, $p_2=\Pi^\lambda\cap\Pi^\upsilon=Oz_{\lambda-1}$, $p_3=\Pi^\nu\cap\Pi^\upsilon=Oz_{r_1+1}\notin\Pi^{r_1}$ (конструкция вида M_1), то, как и в п.**1**, имеет место равенство $\vartheta_{\lambda-1}\xi_\lambda\chi_{r_1+1}=\chi_\lambda\vartheta_{r_1+1}\xi_{\lambda-1}$. Оно справедливо только при

$$\vartheta_{r_1+1}=c_1^{-1}\xi_\lambda,\quad \chi_{r_1+1}=c_2\xi_{\lambda-1},\quad \chi_\lambda=c_1c_2\vartheta_{\lambda-1}. \tag{8}$$

При этом многочлены R, T, P имеют вид

$$R=\chi_\lambda,\quad T=\xi_\lambda,\quad P=c_1c_2\xi_{\lambda-1}, \tag{9}$$

S – произвольный.

Если $g>1\,(\upsilon>\upsilon_1=1)$, то, согласно (4), многочлен

$$S=\lambda_1^{-1}(\xi_\lambda-\lambda_0\chi_\lambda). \tag{10}$$

Если теперь и $\upsilon_1>1$, а $g+\upsilon<\mu+2$ [2], то, согласно (6), имеем

$$S=c_1c_2h_1^{-1}(\xi_{\lambda-1}-h_0\vartheta_{\lambda-1}),$$

и к соотношениям (8) добавляется условие

$$\Delta\chi_\lambda=h_1\xi_\lambda-c_1c_2\lambda_1\xi_{\lambda-1}, \tag{11}$$

где $\Delta=\lambda_0h_1-\lambda_1h_0\ne 0$.

Таким образом, в уравнении (1) многочлены R, T, P имеют вид (9) при выполнении равенств (8), причем, если $g>1$, $\upsilon>\upsilon_1>1$ и $g+\upsilon<\mu+2$, S имеет вид (10) при выполнении условий (11).

4. Пусть $p_1=\Pi^\mu\cap\Pi^\kappa=Oz_{\lambda+1}$, $p_2=\Pi^\mu\cap\Pi^\upsilon=Oz_{\lambda+2}$, $p_3=\Pi^\nu\cap\Pi^\upsilon=Oz_{r_1+1}\notin\Pi^{r_1}$ (конструкция вида M_1). Тогда, как и ранее, приходим к выполнению соотношений

$$\zeta_1=c_1\vartheta_{r_1+1},\quad \chi_{r_1+1}=c_2\zeta_2,\quad \chi_{\lambda+1}=c_1c_2\vartheta_{\lambda+2}, \tag{12}$$

и многочлены S,T,P имеют вид:

$$S=\chi_{\lambda+1},\quad T=\zeta_1,\quad P=c_1c_2\zeta_2 \tag{13}$$

(R – произвольный).

Если $g>1(\upsilon_1=1)$, то, согласно (4),

$$R=\lambda_0^{-1}(\zeta_1-\lambda_1\chi_{\lambda+1}). \tag{14}$$

Если теперь и $\upsilon_1>1$, $g+\upsilon<\mu+2$ [2], то

$$R=h_0^{-1}(c_1c_2\zeta_2-h_1\chi_{\lambda+1}),$$

и к соотношениям (12) добавляется условие

$$\Delta\chi_{\lambda+1} = c_1 c_2 \lambda_0 \zeta_2 - h_0 \zeta_1. \tag{15}$$

Следовательно, в уравнении (1) многочлены S, T, P имеют вид (13) при выполнении условий (12). В случае $g > 1$, $\upsilon_1 > 1$ и $g + \upsilon < \mu + 2$, R определяется формулой (14), а к (12) добавляется соотношение (15).

5. Рассмотрим случаи, описанные в п.п. **3,4**, с условием, что прямая $p_3 = \Pi^{\nu} \cap \Pi^{\upsilon} \in \Pi^{\eta}$ (конструкции вида M_2). Тогда $\upsilon = \upsilon_1 = 2$ и $g \le \mu$ [2]. Кроме того, так как $g \ge 2$, поместим в плоскости Π^{g-1} новые координатные оси $Oz'_p (p = \overline{1, g-1})$ так, что p_3 параллельна Oz'_1, и положим

$$\chi_p = \lambda_0^{-1}(\xi_p + \sum_{\tau=1}^{\lambda-g+1} A_{\tau p} \xi_{g+\tau-1}) = \lambda_1^{-1} \sum_{i=1}^{\mu} B_{ip} \zeta_i, \tag{16}$$

$p = \overline{1, g-1}$ (см. [2]), т. е. $\chi_p \in$ ФОТ.

Тогда, как и ранее, в каждом из рассматриваемых случаев приходим к соотношениям, которые вместе с (16) требуют цилиндричности F_n, что исключается.

Следовательно, при данных расположениях Π^j $(j = \overline{0, 3})$ не существует поверхность F_n с группой симметрий G.

Теорема доказана.

Отметим, что здесь исследованы случаи 1.2.6–1.2.10 таблицы 3, работы [4]; случаи $q \ge 4$ прямых пересечения Π^j рассмотрены в [5].

Литература.

1. Игнатенко В. Ф. О геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии – М.: ВИНИТИ АН СССР. – 1989. – Т.21. – С.155-208.
2. Ignatenko V. F. Invariants of Finite and Infinite Groups genereted by Reflections // J. Math. Sc. - 1996. - 76, N 3. - P. 334-361.
3. Штуро С. В. О бесконечных группах косых симметрий, имеющих четыре орбиты направлений симметрии // Тезисы докладов Пятой Международной научной конференции им. акад. М. Кравчука. - Киев, 1996. - С. 501.
4. Игнатенко В. Ф., Рудницкий О. И. О диких группах косых симметрий, имеющих четыре орбиты направлений симметрии / Симфероп. гос. ун-т; Симферополь, 1998. - 26 с. - Деп. в ГНТБ Украины 23.03.98, № 159 - Ук98.
5. Рудницкий О. И. Три класса алгебраических поверхностей с бесконечными группами косых симметрий // Труды матем. ф-та. Изд-во Симф. университета, Симферополь, 1997. - С. 95-99.