ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ

Белан Е. П., кандидат физ.-мат. наук, доцент

Рассмотрим систему уравнений химической кинетики

$$\partial_t u = \nu\Delta u + \lambda u + f(u) - g(x) \qquad (1)$$

где $\nu>0$, $\lambda\geq 0$, Δ-оператор Лапласа, $u = (u^1, \dots , u^m)$, $f = (f^1, \dots, f^m)$, $g = (g^1,\dots, g^m)\in(L_2(\Omega))^m = H(\Omega)$. Предположим, что функция $f(u)\in C^1(R^m)$ и удовлетворяет условиям

$$(f(u), u) \geq \mu_0|u|^{p}, \qquad |f(u)| \leq |u|^{p-1} + C, \qquad (2)$$

$$\Sigma(\partial f_k / \partial u_i)\zeta_i\zeta_k \geq 0 \qquad \forall\zeta = (\zeta_1, \dots ,\zeta_m)\in R^m, \qquad (3)$$

где $p_0 > 2$, C - постоянная. Пусть $\Omega\subset R^n$ ($n \leq 3$) ограниченная область с липшицевой границей. Система (1) рассматривается при одном из следующих граничных условий:

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (4)$$

$$\partial u/\partial n|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (5)$$

$$u(x_1,\dots, x_i + 2\pi,\dots, x_n) = u(x_1,\dots, x_i,\dots, x_n), \quad i = 1,\dots, n. \qquad (6)$$

В случае (6) предполагается, что $\Omega = T^n$, где T^n– мерный тор, а функция $g(x)$ является 2π–периодической. Если $\partial\Omega$ не принадлежит C^1, требуется выполнение условия (5) почти всюду. Далее через H^s обозначается шкала пространств, порождаемая оператором - ΔI (I– единичная m– мерная матрица) при граничных условиях (4), (5) или (6). Норма в этих пространствах задается формулой $\|u\|^2_s = < -\Delta^s u, u >$ (при условиях (5), (6) – это полунорма, норма равна $|\ |_0 + \|\ \|_s$). Операторы Δ^s и пространства H^s различны в случае условий (4), (5), (6), но согласно интерполяционной теореме $H^s\subset H^s(\Omega)$ и норма $H^s(\Omega)$, суженная на H^s эквивалентна норме в H^s. Поэтому пользуемся одним обозначением и в случае (4), и в случае (5), и в случае (6).

Тщательный анализ свойств полугрупп $\{S_t\}$, действующих в H и соответствующих задачам (1), (4); (1), (5); (1), (6) выполнен в [1]. Зафиксируем пространство H и соответствующую полугруппу $\{S_t\}$. Предположим далее, что в условии (2) при $n = 3$ параметр $p_0 \leq 6$.

В дополнении к сформулированным условиям предположим, что функция f удовлетворяет условию подчиненности линейной части, которое имеет вид

$$|\partial f^k(u) / \partial u^i| \leq C_1(1+ |u|^{p-2}) \qquad (7)$$

В [1] показано, что полугруппа $\{S_t\}$ имеет H-поглощающее множество G, компактное в H^2.

Техника, используемая в этой работе для построения инерциального многообразия ИМ уравнения (1), восходит к работе [2]. В связи с задачей о возмущении инвариантных многообразий полулинейных параболических уравнений метод Коппеля-Пальмера был обобщен в работе [3]. Техника

Коппеля-Пальмера использована в [4] для построения центральных многообразий квазилинейных параболических уравнений.

Проблема построения ИМ для систем уравнений типа реакции-диффузии, близкая к рассматриваемой здесь проблеме, исследовалась в ряде работ (см. [3, 5 - 10]) и указанную в них литературу).

H-поглощающее множество $\{S_t\}$, ограниченное в H^2 обозначим через G. Предположим $G\subset\{u: \|u\|_2 < \rho/2\}$. Согласно ([1], лемма I.5.1) оператор $B:u \to f(u)$ действует из H^2 в H, причем

$$\|B(u) - B(v)\| = C_2\|u - v\|(1 + \|u\|_2 + \|v\|_2),$$

где C_2 - постоянная. Пусть $\{e_k, k = 1, \ldots\}$ ортонормированный базис в H такой, что

$$Ae_k = \lambda_k e_k, \qquad \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots, \quad \lim \lambda_k = \infty,$$

где $A = -\Delta I$-оператор, рассматриваемый в пространстве H.

Зафиксируем целое N. Пусть $\lambda_{N+1} - \lambda > 0$. Пусть функция f удовлетворяет условиям (2), (3), (7).

Основным результатом работы является теорема.

Теорема 1. *Существует постоянная M такая, что если*

$$\nu(\lambda_{N+1} - \lambda_N) \ge M, \tag{8}$$

тогда полугруппа $\{S_t\}$ имеет N - мерное инерциальное многообразие.

Рассмотрим случай n = 2. Пусть $\Omega = [0,2\pi]^2$. Так как множество собственных значений оператора $-\Delta I$ на H имеет вид

$$(m^2+k^2),$$

где $(m, k)\in Z^2$, то согласно [11] неравенство (8) выполняется для любого $\nu > 0$ при соответствующем выборе N. Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 2. *Пусть правая часть уравнения* (1) *удовлетворяет сформулированным выше условиям. Тогда для каждого $\nu > 0$ полугруппа $\{S_t\}$ имеет инерциальное многообразие.*

Заметим, что теорема 2 справедлива и без условия (3).

Литература.

1. Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений.–М. Наука, 1989.– 294 с.

2. Coppel W. A., Palmer R. J. Averaging and Integral Manifolds //Bull. Austral Math. Soc. – 1970. – P.197-222.

3. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М. Мир, 1985. – 374 с.

4. Белан Е. П., Лыкова О. Б. Теорема о центральном многообразии нелинейного параболического уравнения. //Укр. мат. ж. , 1995. – 48, 8, – С. 1021-1036.

5. Foias C., Sell G. R. and Temam R. Inertial Manifolds for Nonlinear Evolutionary Equations. //J. Diff. Eq. – 1988. – 73, – P. 309-353

6. Mallet-Paret J. and Sell G.R. Inertial Manifolds for Reaction Diffusion Equation. //J. AMS – 1988. – 1, – P. 805-866.

7. Constantin P., Foias C., Nicolaenko B. and Temam R. Spectral Barriers and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations. //J. Dynamics Diff. Eq. – 1989. – 1, 1. – P. 45 – 73.
8. Чуешов И.Д. Введение в теорию инерциальных многообразий-.- Харьков: Изд-во ХГУ. 1992. – 97 с.
9. Чуешов И.Д. Глобальные аттракторы в уравнениях математической физики //Успехи мат. наук- 1993. – 48, 3. – С. 135-161.
10. Романов А.В. Точные оценки размерности инерциальных многообразий нелинейных параболических уравнений //Известия РАН сер. мат. – 1993 – 57, 4. – С. 36-54.
11. Richards I. On the gaps between numbers which are the sum of the squares // Adv. Math. – 1982 – 46. – P. 1-2.