ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ В ТЕОРИИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Анашкин О. В., кандидат физ.-мат. наук, доцент

1. Многие природные и технологические процессы характеризуются зависимостью скорости изменения состояния процесса не только от текущего состояния, но и от предыстории. Для моделирования таких процессов применяются функционально-дифференциальные уравнения запаздывающего типа (ЗФДУ) [1-3]. Основным методом исследования устойчивости решений ЗФДУ является прямой метод Ляпунова, причем в теории различают два подхода в рамках этого метода. Первый нацелен на использование функций Ляпунова, определенных в конечномерном пространстве состояний процесса (см., например, [4]). Второй подход нам представляется более плодотворным, так как он учитывает бесконечномерность многообразия решений ЗФДУ. Свойства решений изучаются не непосредственно, а по их образам в банаховом пространстве $C_h = C([-h,0], \mathbf{R}^n)$ непрерывных вектор-функций, определенных на отрезке $[-h,0]$, $h > 0$. Для данной функции $x(t)$ через x_t обозначается элемент из C_h, определенный как $x_t(s) = x(t+s)$, $-h \le s \le 0$. Теоремы об устойчивости формулируются как условия существования функционала Ляпунова-Красовского [2], определенного в $\mathbf{R}_+ \times C_h$. Ставшие уже классическими теоремы Н. Н. Красовского [2] являются первыми в длинном ряду результатов, использующих этот подход [1-3]. В настоящей заметке предлагаются достаточные условия устойчивости для одного класса ЗФДУ, отличающиеся от известных результатов тем, что основные ограничения, в частности, условие знакоопределенности функционала, вводятся не во всем пространстве C_h, а лишь в некотором конусе $\mathcal{A}_R^h \subset C_h$. При этом функционал не является монотонно изменяющимся вдоль траектории x_t, что существенно облегчает задачу построения такого функционала. В статьях [5-8] доказаны соответствующие теоремы и приведены примеры построения подходящих функционалов в основном для случая сосредоточенного запаздывания. В данной заметке мы рассмотрим пример построения функционала для уравнения с распределенным запаздыванием. Сначала дадим общую постановку задачи и сформулируем условия устойчивости из [8].

2. Рассмотрим систему ЗФДУ с конечным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t), \tag{1}$$

где $F : G_H^h \to \mathbf{R}^n$, $G_H^h = \mathbf{R}_+ \times \Omega_H^h$, $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$, $\Omega_H^h = \{\varphi \in C_h : \|\varphi\| < H\}$ – шар в пространстве C_h, снабженном supremum-нормой $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(s)| : -h \le s \le 0\}$, $|\cdot|$ – норма в

$\mathbf{R}^n$. Предполагается, что функция F удовлетворяет неравенствам $\|F(t,\varphi)\| \le M(t)\|\varphi\|^{d_0}$, где $d_0 > 1$, и $\|F(t,\varphi) - F(t,\psi)\| \le M(t)\|\varphi - \psi\|$ для всех $t \ge 0$, $\varphi, \psi \in \Omega_H^h$, функция $M(t)$ интегрируема на любом конечном отрезке $[t_1, t_2] \in \mathbf{R}_+$.

Для данных $h > 0$ и $R > 1$ определим множество

$$\mathcal{A}_R^h = \{\varphi \in C_h \colon \|\varphi\| \le R\,|\varphi(0)|\}.$$

Нетрудно видеть, что это множество обладает свойствами: $\mathcal{A}_R^h \ne \phi$ для $R \ge 1$; $\mathcal{A}_{R_1}^h \subset \mathcal{A}_{R_2}^h$ для $R_1 < R_2$; граница $\partial\mathcal{A}_R^h = \{\varphi \in C_h : \|\varphi\| = |\varphi(0)|\}$; $\mathcal{A}_1^h = \partial\mathcal{A}_R^h$; $\mathcal{A}_R^h$ есть невыпуклый конус в C_h. Конус $\mathcal{A}_R^h$ играет ключевую роль в нашем подходе потому, что, во-первых, норма $\|x_t\|$ может возрастать лишь тогда, когда $x_t \in \mathcal{A}_1^h$ и, во-вторых, $|x(t)|$ стремится к нулю пока x_t находится вне конуса $\mathcal{A}_R^h$ для какого-либо $R > 1$.

Пусть $\mathbf{K}$ есть множество всех строго возрастающих функций $a : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+, a(0) = 0$.

ТЕОРЕМА. [8] *Предположим, что для некоторых $h_0 \ge h$ и $R > 1$: 1) существуют функционалы $v, \Phi : G_H^{h_0} \to \mathbf{R}$ и функции $a, b \in \mathbf{K}$ такие, что: а) $\dot{v}_{(1)}(t, \varphi) \le \Phi(t, \varphi)$; б) $v(t, \varphi) \le b(\|\varphi\|)$ для $(t, \varphi) \in G_H^{h_0}$; в) $v(t, \varphi) \ge a(\|\varphi\|)$ для $t \ge 0$ и $\varphi \in \mathcal{A}_R^{h_0} \cap \Omega_H^{h_0}$;*

2) существуют константа $d > 1$ такая, что $|\Phi(t,\varphi)| \le M(t)\|\varphi\|^d$, $|\Phi(t,\varphi) - \Phi(t,\psi)| \le M(t) r^{d-1}\|\varphi - \psi\|$ для $t \ge 0$ и $\varphi, \psi \in \Omega_r^h$, $0 < r < H$; 3) существуют постоянные $T > 0, \beta > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для любых $t_0 \ge 0$, x_0, $|x_0| < \beta$, и $\Delta t \ge T$

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \Phi(t, x_0)\,dt \le -2\delta |x_0|^d \Delta t.$$

Тогда нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво.

3. Рассмотрим следующее уравнение с распределенным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = a(t)\int_{-h}^{0} b(s)x^2(t+s)ds, \tag{2}$$

где коэффициент $a(t)$ имеет нулевое среднее, т.е. $\{a(t)\} = 0$. В соответствии с подходом, развитым в [7, 8], построение подходящего функционала начнем с положительно определенной функции

$v_0(x)=x^2/2$. Вычисляя производную Φ_0 этой функции в силу уравнения (2), получим $\Phi_0 = x(t)a(t)\int_{-h}^{0} b(s)x^2(t+s)ds$, очевидно, что среднее $\{\Phi_0(t.x_0)\}=0$. Определим возмущение v_1 так, что $\partial v_1/\partial t = -\Phi_0$, тогда $v_1(t,\varphi) = -A(t)\varphi(0)\int_{-h}^{0} b(s)\varphi^2(s)ds$, где $A(t)$ есть первообразная функции $a(t)$. Дифференцируя возмущенный функционал $v(t,\varphi)=v_0(\varphi(0))+v_1(t,\varphi)$ в силу уравнения (2), имеем

$$dv/dt = \Phi_1(t,x_t) = -A(t)a(t)\left[\int_{-h}^{0} b(s)x^2(t+s)ds\right]^2 -$$
$$- A(t)x(t)\int_{-h}^{0} b(s)x^2(t+s)a(t+s)\int_{-h}^{0} b(l)x^2(t+s+l)dlds$$

Вычисляя среднее $\{\Phi_1(t.x_0)\}$, получим выражение для индекса устойчивости S :

$$S = \left\{A(t)a(t)b_0 + A(t)\int_{-h}^{0} b(s)a(t+s)b_0 ds\right\}.$$

Здесь $b_0 = \int_{-h}^{0} b(s)ds$. Нулевое решение уравнения (2) равномерно асимптотически устойчиво при $S>0$ и неустойчиво при $S<0$.

Литература.

1. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
2. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.-Л.: Физматгиз, 1959.
3. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.
4. Разумихин Б.С. Устойчивость эредитарных систем. М.: Наука, 1988.
5. Анашкин О.В. Метод усреднения в теории устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т.33, №4. – С.448-457.
6. Анашкин О.В. Параметрический резонанс в линейной системе с запаздыванием //Известия РАЕН, серия МММИУ. – 1997. Т.1,№1. – С.3-17.
7. Анашкин О.В. Достаточные условия устойчивости и неустойчивости для одного класса функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т.34, №7.
8. Anashkin O. Stability Theorems for Nonlinear Functional Differential Equations // Mathematical and Computer Modelling. – 1998 – V.28, No.2. – P. 25-35.